Начнём с задачи о пульсирующем заряде.
У нас есть заряд, который покоится, однако его величина меняется по известному закону q(t) (мы его запишем как q_0*f(t), чтобы обезразмерить функцию времени).
Каков будет потенциал от него?
Неправильный ответ: q(t)/r.
Правильный ответ: q(t-r/c)/r.
Т.е. если мы захотим узнать потенциал на расстоянии 300 тыс км от зарядов, нам надо будет знать заряд, который был секунду назад. Если точка наблюдении на расстоянии 450 тыс км – то полторы секунды назад.
Т.е. потенциал распространяется в пространстве как волна, не мгновенно. Если бы он распространялся бы мгновенно, то информация во Вселенной бы распространялась мгновенно, а у нас всё-таки есть ограничение.
Но я напомню, что не электродинамика выводится из СТО, а ровно наоборот, СТО из электродинамика. Поэтому СТО выводится из электродинамики, и в электродинамике СТО мы пользоваться мы не можем. Зато можем пользоваться уравнениями Максвелла. Давайте оттуда и получим эту формулу.
Плясать будем от волновых уравнений

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho(\mathbf{r},t); \quad \nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$$

Ну, точнее, от первого.

Плотность заряда везде, кроме начала координат, 0:

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$$

Потенциал зависит только от r, так что у лапласиана ненулевой будет только радиальная составляющая:

$$\nabla_r^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$$

Имеет он вот такой вид

$$\nabla_r^2\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

Подставляем, раскрываем производную. Получаем дифур

$$\varphi^{||} + \frac{2}{r}\varphi^{|} - \frac{1}{c^2}\ddot{\varphi} = 0$$

Где штрихами обозначены производные по r, а точками – по времени.
Это было бы волновым уравнений, если бы не второе слагаемое.

Получим волновое уравнение, сделав замену

$$\chi(\vec{r},t) = r * \varphi(\vec{r},t)$$

Как до неё додуматься? Ну, мы понимаем из физических соображений, что потенциал убывает с ростом r, и, скорее всего, обратно пропорционально. Тогда эта замена становится более понятно.
Если мы выразим φ через χ: $\vec{r}$

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{\chi(\vec{r},t)}{r}$$

Подсчитаем две производные по r и одну вторую по времени и подставим их в уравнение, то получим относительно χ уже волновое уравнение:

$$\chi^{||} + \frac{1}{c^2}\ddot{\chi} = 0$$

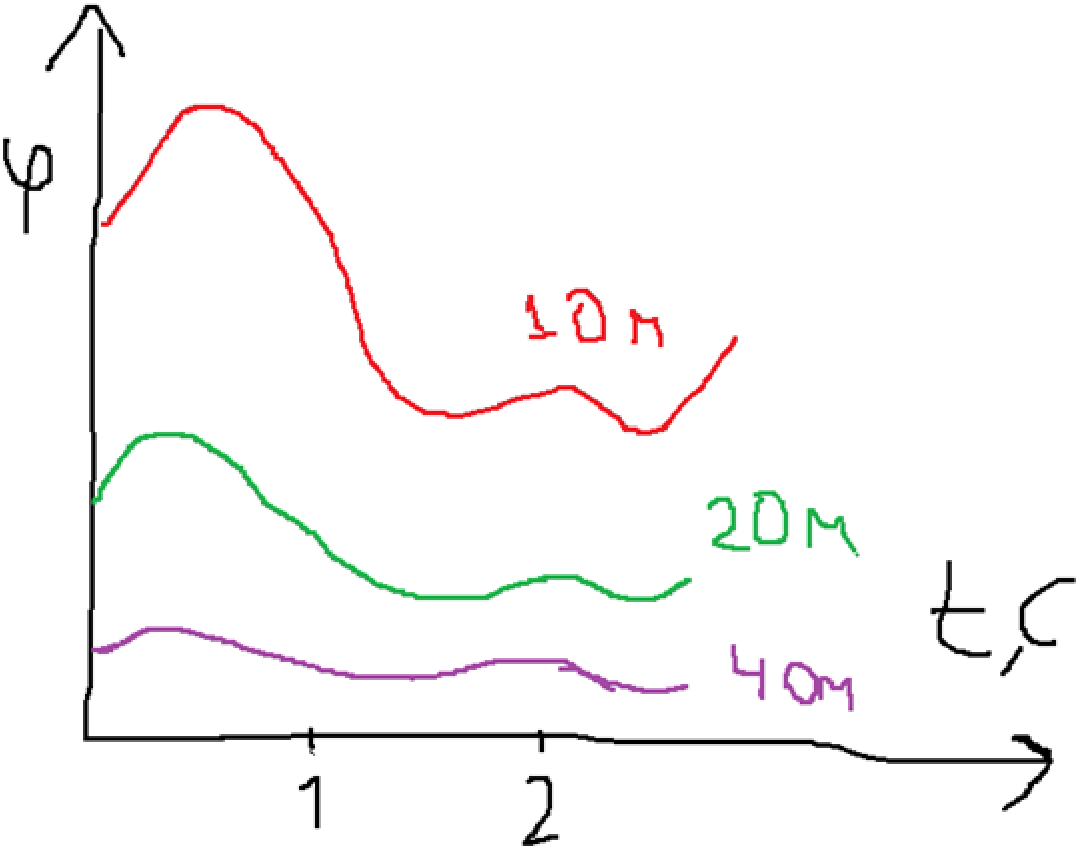
Мы при слове «волна» привыкли представлять себе бегущие E и B. Но точно таким же уравнениям подчиняются и φ, и A.

Кстати, обратите внимание: нигде тут у нас нет никакой циклической частоты ω. Её и не должно быть. Читатель мог до этого привыкнуть, что волна – это нечто синусоидальное с циклической частотой ω. Это всё частный случай гармонической, т.е. синусоидальной волны. Заряд может пульсировать по абы какому закону, но возмущение от него будет спадать обратно пропорционально расстоянию.

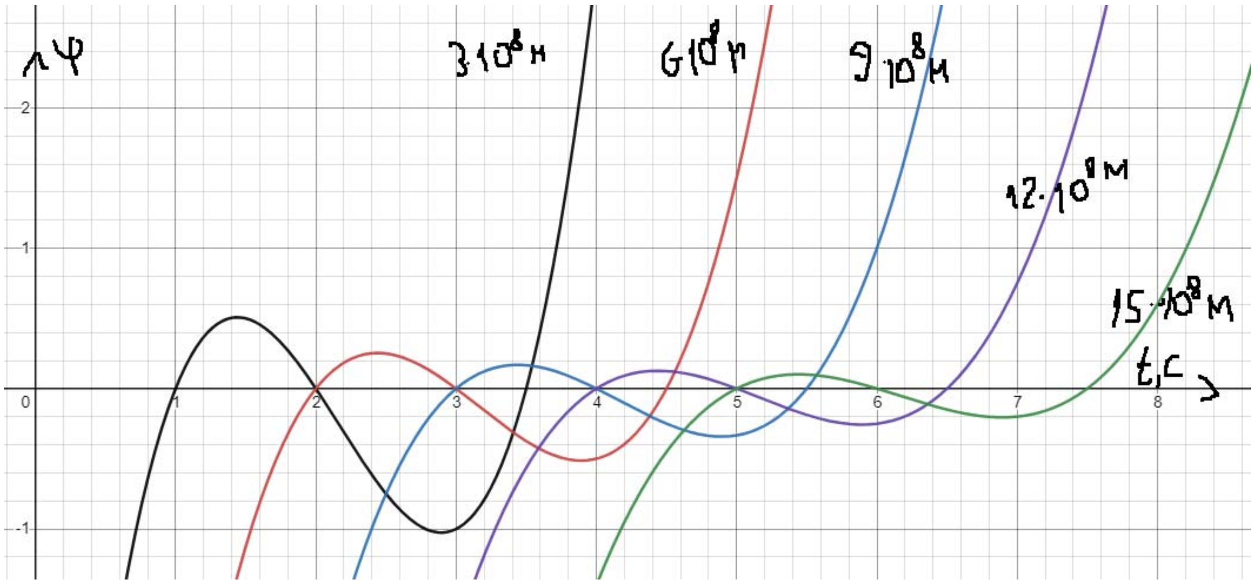
Итоговая формула для потенциала:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{q\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}$$

Пример. Зависимость потенциала от времени для разных расстояний до заряда:



Если характерные расстояния достаточно малы, то наши кривые практически синхронны (сдвинуты буквально на микросекунды).
А вот если мы отойдём подальше, то время задержки будет уже секунды:



Видно, что тем дальше мы находимся от заряда, тем не только меньше потенциал, но и больше времени задержки.
Вопрос на понимание: в какие моменты пульсирующий заряд становится ноль?
Ответ: 0 сек, 1 сек, 2,5 сек.

Это было легко, а теперь решим главную задачу: найти скалярный и векторный потенциал движущегося заряда. Т.н. потенциалы Лиенара-Вихерта (два учёных, независимо их нашедшие).
Для начала рассмотрим прямолинейно движущийся вдоль оси x заряд с постоянной скоростью v.
$x(t)=v*t + x_0$
Точку наблюдения для простоты возьмём на оси x, и в точке наблюдения возьмём 0 оси x – это вполне естественно. А 0 времени лучше взять в момент, когда заряд пролетит точку наблюдения. Тогда в уравнении координаты для заряда исчезнет свободный член:
$x(t)=v*t$
Итак, находим потенциал в точке наблюдения.
Неправильный ответ:
$\varphi(t)=q/x(t)$.
К этому неправильному ответу мы должны внести ДВЕ поправки – очевидную и неочевидную.
Сначала подробно разберём первую, очевидную (а про вторую я буду пока умалчивать, так что **ответы для потенциала у нас будут неверные (!)**… но очень правдоподобные).
Чем вызвана первая, очевидная поправка? $x_{заряда}(t)$ просто не успеет внести влияние в $\varphi(t)$ в точке наблюдения (если только заряд как раз не пролетает мимо точки наблюдения), т.к. между зарядом и точкой конечное расстояние, и потенциал (см.выше) не может преодолеть конечное расстояние за нулевое время.

Вместо x(t) мы в формулу для потенциала заряд/координату должны взять другую координату $\tilde{x}$.

Рассмотрим 2 случая.
Случай 1: заряд движется К точке наблюдения. Тогда x<0 и t<0. Двигаясь, заряд испускает «волну» потенциала со скоростью v.
Тогда, чтобы «волна» успела добежать до нуля оси абсцисс, точка $\tilde{x}$должна быть левее x, и в точке наблюдения будет волна, испущенная именно из точки $\tilde{x}$.
Тогда запишем систему уравнений:
x - $\tilde{x}$= v* время запаздывания $\tilde{\tau}$
0 - $\tilde{x}$=c* время запаздывания $\tilde{\tau}$
Если мы её решим, то получим

$$\tilde{x}(t) = \frac{x}{1 - \frac{v}{c}}$$

И так как наблюдатель в точке наблюдения зафиксирует именно волну, пришедшую от точки $\tilde{x}$, то именно $\tilde{x}$ надо подставлять в формулу

$$\varphi(x) = \frac{q}{|\tilde{x}|} = \frac{q\left(1 - \frac{v}{c}\right)}{|x|}$$

Случай 2: заряд движется ОТ точки наблюдения.
Тогда, чтобы «волна» успела добежать до нуля оси абсцисс, точка $\tilde{x}$вновь должна быть левее x, и в точке наблюдения будет волна, испущенная именно из точки $\tilde{x}$.
Система будет:
x - $\tilde{x}$= v* время запаздывания $\tilde{\tau}$
$\tilde{x}$=c* время запаздывания $\tilde{\tau}$
Т.е. пока волна успела пробежать от $\tilde{x}$ до 0, заряд прошёл от $\tilde{x}$ до x. Заряд двигается же медленней света, так и должно быть.
Решая эту систему, получим

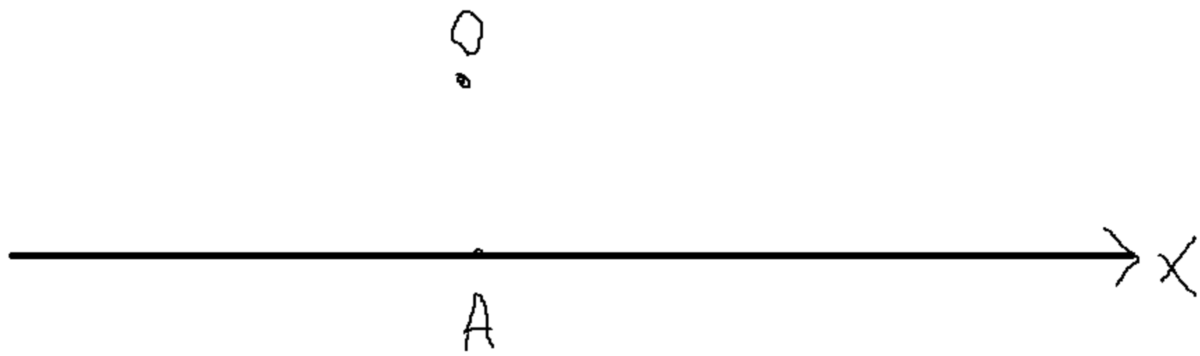
$$\tilde{x} = \frac{x(t)}{1 + \frac{v}{c}}$$

Подставим в потенциал:

$$\varphi(x) = \frac{q}{\tilde{x}} = \frac{q\left(1 + \frac{v}{c}\right)}{x}$$

Практически та же формула, но с плюсом вместо минуса.

Теперь рассмотрим более общий случай: точка наблюдения O не на оси движения заряда.



A – ближайшая к O точка на прямой. Возьмём её за нуль координат, время, когда заряд пройдёт точку A – за ноль времени. Тогда

$$x = vt$$

Длина отрезка OA считается известной, обозначим её как s.

Тогда расстояние от O до заряда будет по теореме Пифагора

$$r(x) = \sqrt{s^2 + x^2}$$

Итак, наблюдатель видит заряд, который находится прямо сейчас в точке x и хочет узнать напряжённость от заряда прямо сейчас в точке наблюдения. И вновь ему придётся вспомнить, что прямо сейчас до него доходит волна, испущенная зарядом ранее из точки $\tilde{x}$. Тогда потенциал будет

$$\varphi(x) = \frac{q}{\tilde{r}}$$

Заряд за это время успел пройти

$$x - \tilde{x} = v * \tilde{\tau}$$

Ну а волне пришлось пройти

$$\tilde{r} = c * \tilde{\tau}$$

На это ушло равное время:

$$\tilde{\tau} = \frac{x - \tilde{x}}{v} = \frac{\tilde{x}}{c}$$

Это квадратное уравнение относительно $\tilde{x}$.

$$x - \tilde{x} = \tilde{x} * \frac{v}{c}$$

$$\tilde{x}\left(\frac{v}{c} + 1\right) = x$$

$$\tilde{x} = \frac{x}{\frac{v}{c} + 1}$$

Заметим, что при $x > 0$ $\tilde{x} < x$. Так и должно быть: к моменту приёма сигнала из $\tilde{x}$ заряд уже ушёл в x:

Формула для потенциала

$$\varphi(t) = \frac{q}{\tilde{r}(t)} = \frac{q}{\sqrt{s^2 + \tilde{x}^2}} = \frac{q}{\sqrt{s^2 + \left(\frac{x(t)}{\frac{v}{c} + 1}\right)^2}} = \frac{q}{\sqrt{s^2 + \left(\frac{vt}{\frac{v}{c} + 1}\right)^2}}$$

(**Начиная с этого момента, все формулы для потенциала уже будут верными**). Все наши ответы выглядят достаточно правдоподобно, но однако, неверны. Требуется ещё одна поправка, гораздо более неочевидная.

r(t) – известный закон движения заряда,
Точку наблюдения возьмём за нулевой радиус-вектор, $\tilde{r}$ - радиус-вектор от точки наблюдения к точке на траектории, откуда излучение от заряда пришло к наблюдателю как раз к нужному моменту времени.

Так вот, тогда вместо

$$\frac{q}{\tilde{r}}$$

Ответом будет

$$\frac{q}{\tilde{r} + (\frac{\vec{v}}{c}, \tilde{r})} = \frac{q}{\tilde{r}(1 + \frac{v_{\tilde{r}}}{c})}$$

Где $v_{\tilde{r}}$ - проекция вектора скорости на этот самый радиус-вектор $\tilde{r}$

Докажем!
Напомним: **r**(t) – известный закон движения заряда,
Точку наблюдения возьмём за 0 системы координат, а вдобавок ноль времени возьмём в тот момент, когда наблюдатель хочет узнать заряд.

Запишем потенциал в виде интеграла по времени:

$$\varphi(r) = \int_0^\infty \frac{q}{r(\tau)} \delta\left(\tau - \frac{r(\tau)}{c}\right) d\tau$$

Объясню смысл этой формулы – мы интегрируем по временам запаздывания. Для каждого времени запаздывания мы считаем потенциал q/r(τ), но вклад в точку наблюдения будет только тогда, когда заряд тогда находился на расстоянии c*τ от точки наблюдения.

Смысл интеграла понятен. Как интегрировать? Ведь аргумент дельта-функции – сложная функция переменной интегрирования.
Заметим, что если мы упростим аргумент дельта-функции

$$\int_0^\infty \frac{q}{r(\tau)} \delta(\tau) d\tau$$

То интеграл будет, очевидно, равен

$$\frac{q}{\tilde{r}}$$

Однако мы упростили аргумент дельта-функции, а так делать нельзя!

Математическое отступление. Как вычислять интегралы типа

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta g(\tau)d\tau$$

Ответ: нужно

1) найти корни функции g(), которые мы обозначим как τ_n

2) Интеграл будет равен

$$\sum_{\text{по всем корням } \tau_n} \frac{f(\tau_n)}{g^{|}\tau_n}$$

Автор не будет доказывать этот алгоритм в общем случае доказывать, но разберу для понимания частный случай, когда у функции g() есть обратная функция $\bar{g}()$ (сверху стоит значок отрицания).

Тогда можно сделать замену переменной. Пусть g(τ)=α (замена вводится для того, чтобы аргументом дельта-функции была простая величина α, а не какая-то ещё функция).

Тогда $\tau = \bar{g}(\alpha)$. Делаем замены везде в исходном интеграле:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{g}(\alpha))\,\delta(\alpha)\,d\bar{g}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{g}(\alpha))\,\bar{g}'(\alpha)\,\delta(\alpha)\,d\alpha$$

А такой интеграл мы уже брать умеем: это $f(\bar{g}(0))\,\bar{g}'(0)$

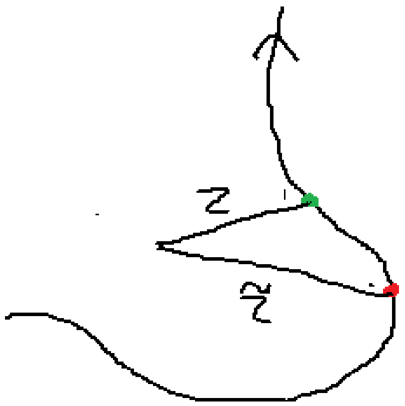
А теперь анализируем. $\bar{g}(0)$ – это как раз момент, когда g() зануляется, т.е. как раз корень g(). Производную обратной функции g() можно выразить через производную самой g(), только тогда она пойдёт в знаменатель (помните школьную формулу производной обратной функции?):

$$\bar{g}'(\alpha) = \frac{d\bar{g}(\alpha)}{d\alpha} = \frac{d\tau}{dg(\tau)} = \frac{1}{g'(t)}$$

Вот и получаем $\frac{f(\tau_{\text{корня}})}{g'(\tau_{\text{корня}})}$, что является частным случаем общей формулы

$$\sum_{\substack{\text{по}\\\text{всем}\\\text{корням}}} \frac{f(\tau_n)}{g'(\tau_n)}$$

Если у нас скорость заряда не превосходит скорости света, то по какой бы он траектории не двигался, корень будет один. Это будет $\tilde{\tau}$, а радиус-вектор в этот момент - $\tilde{r}$:



Именно из красной точки, соответствующей $\tilde{r}$, заряд испускает волну, достигшей точки наблюдения как раз к нулевому моменту времени.

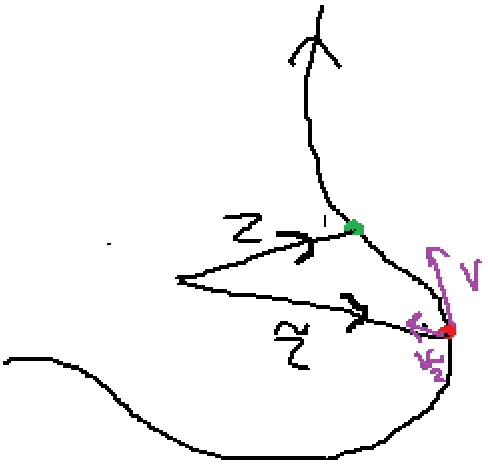
Возвращаемся к интегралу для потенциала

$$\varphi(r) = \int_0^\infty \frac{q}{r(\tau)} \delta\left(\tau - \frac{r(\tau)}{c}\right) d\tau$$

Корень g() мы уже нашли. Осталось взять производную.

$$\left.\frac{d\left(\tau - \frac{r(\tau)}{c}\right)}{d\tau}\right|_{\tau=\tilde{\tau}} = \left.\left(1 - \frac{1}{c}\frac{dr(\tau)}{d\tau}\right)\right|_{\tau=\tilde{\tau}} = 1 + \frac{V_{\tilde{r}}(\tilde{\tau})}{c}$$

Где $V_{\tilde{r}}$ - проекция скорости на радиус-вектор к точке наблюдения.



(на рисунке проекция $V_{\tilde{r}}$ будет отрицательна, потому что радиус-вектор направлен от точки наблюдения к заряду).
Откуда в конце взялся плюс, хотя до этого был минус? Потому что мы дифференцируем по τ – времени запаздывания. Шкала τ у нас направлена против обычного хода времени, поэтому производная по τ противоположна производной по t, которая и есть обычная скорость заряда.

Это мы нашли знаменатель в $\frac{f(\tau_{\text{корня}})}{g'(\tau_{\text{корня}})}$, ну а числитель - $\frac{q}{\tilde{r}}$ (напомню, что $\tilde{r} = r(\tilde{t})$). Итого ответ $\varphi = \frac{q}{\tilde{r}+(\frac{\vec{v}}{c},\tilde{r})}$

Мы получили скалярный потенциал Лиенара-Вихерта!
Тот же результат можно записать и через скалярное произведение:

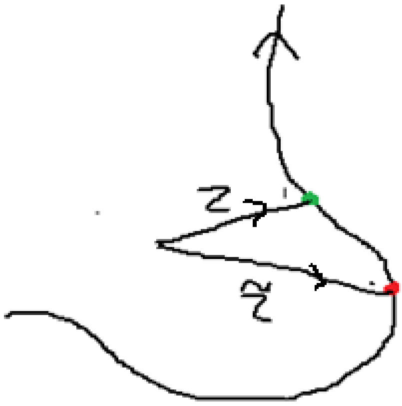
$$\varphi = \frac{q}{\tilde{r} + (\frac{\vec{v}}{c}, \tilde{r})}$$

Аналогично получается и векторный потенциал движущегося заряда: Источником векторного потенциала будет не заряд q, а вектор q**v**/c. Так что неудивительно, что выражение для векторного потенциала будет очень похоже на выражение для скалярного, только надо вместо q подставить q**v**/c:

$$\vec{A} = \frac{\frac{q\vec{v}}{c}}{\tilde{r} + (\frac{\vec{v}}{c}, \tilde{r})} = \frac{q\vec{\beta}}{\tilde{r} + (\vec{\beta}, \tilde{r})}$$

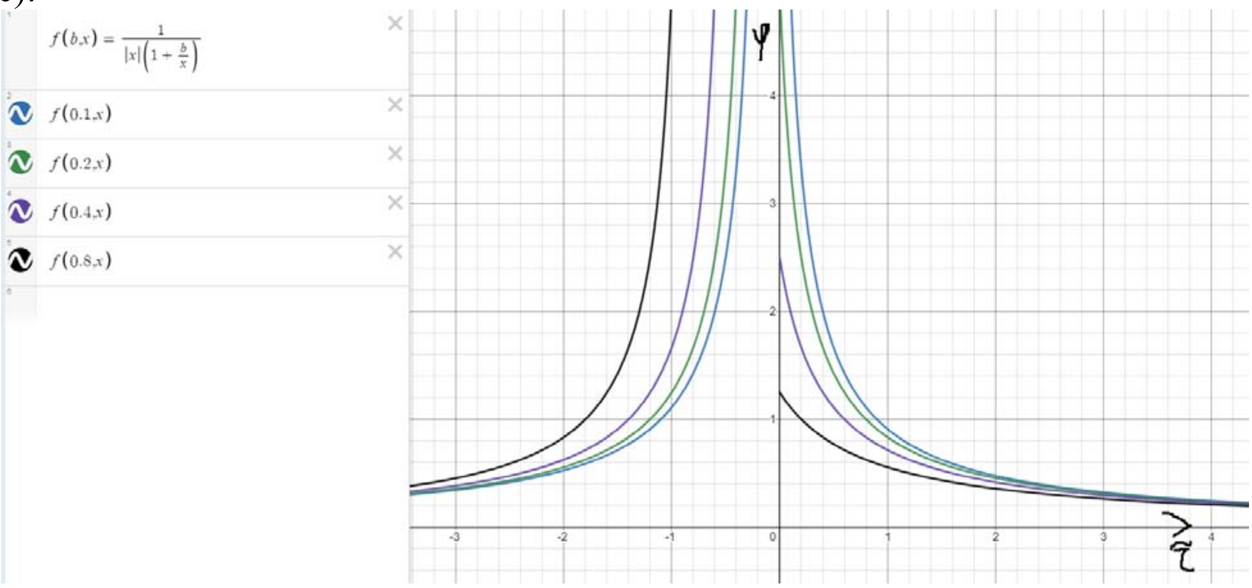
Через $\vec{\beta}$ формула проще всего, поэтому советую запоминать её именно её.
Если заряд движется прямолинейно и равномерно, то **v** и $\vec{\beta}$константы, если нет, то и ту, и другую надо брать в момент запаздывания $\tilde{\tau}$, когда заряд находится на радиус-векторе $\tilde{r}$…

Проверим, что мы умеем пользоваться нашими результатами. Пусть заряд движется равномерно прямолинейно со скоростью v вдоль оси x, наблюдатель находится в 0 оси абсцисс. Давайте построим зависимости потенциала от $\tilde{r}$. Выбор этой переменной в качестве аргумента, кстати, очень удобен наблюдателю, потому что $\tilde{r}$ - кажущееся ему расстояние от него до заряда (истинное есть r, но он его не знает из-за конечности скорости света)



(зелёная точка – истинное положение заряда в момент наблюдения, красное – кажущееся наблюдателю).

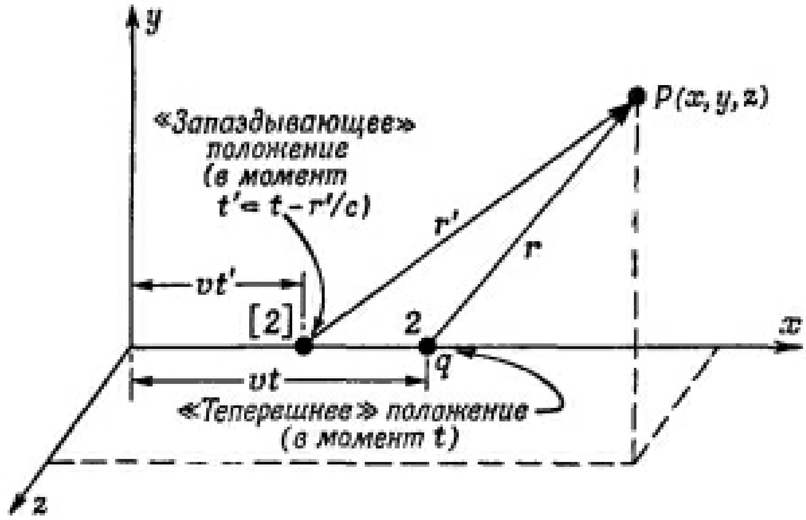
Итак, строим графики для потенциала для разных скоростей (b – отношение v к c):



Как мы видим, они уже несимметричны.

Построить график потенциала в зависимости от времени будет уже гораздо сложнее, потому что тогда надо будет понимать, как зависит $\tilde{r}$от времени. К тому же у нас время t было привязано к моменту наблюдения, теперь мы хотим его сделать переменным.

Дальнейшая наша цель – вывести преобразования Лоренца для координат. Довольно неплохо, кстати, дальнейшее изложено у Фейнмана, так что передаю ему слово. x, t, r со штрихами у него – то же, что у меня было с волной.
И он всё в СИ считает, но с СГС разница минимальная – нужно убрать в знаменателе $4\pi\varepsilon_0$.

Поясняющая иллюстрация: 

Пусть имеется заряд, движущийся вдоль оси *x* со скоростью *v* (фиг. 21.8). Нас интересуют потенциалы в точке *P(x, y, z).* Если t=0 — момент, в который заряд проходит через начало координат, то в момент *t* заряд окажется в точке *x=vt,* y=z=0. А нам нужно знать его положение с учетом запаздывания, т. е. положение в момент

$$t' = t - \frac{r'}{c}, \qquad (21.35)$$

где r′—расстояние от заряда до точки *P* в этот *запаздывающий момент.* В это более раннее время t′ заряд был в *x = vt′* так что

$$r' = \sqrt{(x - vt')^2 + y^2 + z^2}. \qquad (21.36)$$

Чтобы найти r′ или *t′*, это уравнение надо сопоставить с (21.35). Исключим сперва r′, решив (21.35) относительно *r′* и подставив в (21.36). Возведя затем обе части в квадрат, получим

$$c^2 (t - t')^2 = (x - vt')^2 + y^2 + z^2,$$

т. е. квадратное уравнение относительно *t′.* Раскрыв скобки и расположив члены по степеням *t′,* получим

$$(v^2 - c^2)\, t'^2 - 2\,(xv - c^2 t)\, t' + x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0.$$

Отсюда найдем

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) t' = t - \frac{vx}{c^2} - \frac{1}{c} \sqrt{(x - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)}\,. \quad (21.37)$$

Чтобы получить *r′,* надо это *t′* подставить в $r' = c\,(t - t')$.

Теперь мы уже можем найти φ из выражения (21.33), имеющего вид

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r' - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}'/c)} \qquad (21.38)$$

(ввиду того, что v постоянно).
Составляющая v в направлении r′ равна $v(x - vt')/r'$, так что $\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}'$ просто равно $v(x-vt')$, а весь знаменатель равен

$$c(t-t')-\frac{v}{c}(x-vt')=c\left[t-\frac{vx}{c^2}-\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)t'\right].$$

Подставляя $(1-v^2/c^2)t'$ из (21.37), получаем

$$\varphi(x,\ y,\ z,\ t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(x-vt)^2+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)}}.$$

Это уравнение становится более понятным, если переписать его в виде

$$\varphi(x,\ y,\ z,\ t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{1}{\left[\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)^2+y^2+z^2\right]^{1/2}}. \quad (21.39)$$

В выражении (21.39) со всей ясностью предстает перед вами начало преобразований Лоренца. Если бы заряд находился в начале координат в своей собственной системе покоя, то его потенциал имел бы вид

$$\varphi(x,\ y,\ z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{[x^2+y^2+z^2]^{1/2}}.$$

А мы смотрим на него из движущейся системы координат, и нам кажется, что координаты следует преобразовать с помощью Формул

$$x\longrightarrow\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$
$$y\longrightarrow y,$$
$$z\longrightarrow z.$$

Вот и преобразование Лоренца.

В заключение заметим, почему мы не можем сделать то же самое для звука и получить преобразования Лоренца для звука, заключить, что скорость звука (330 м/с) является наибольшей в природе и т.д.
Потенциал Лиенара-Вихерта остаётся верным для звуковых волн. Однако при переходе в другую систему мы не можем сделать вид, что она точно такая же, как и прошлая: если в прошлой воздух покоился, то в движущейся воздух будет двигаться. И мы не можем произнести фразу «а вот в новой системе координат грохот будет такая-то простая формула, откуда преобразования такие», потому что эта формула для безветрия, а у нас там будет ветер. И мы можем спокойно сохранить преобразования Галилея.
Именно этот факт и заставлял физиков до последнего искать эфир. Ведь тогда при переходе в движущую систему координат мы могли сказать: а у нас тут эфирный ветер появился (в прошлой системе координат его не было!), так что написать

$$\varphi(x,\ y,\ z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{[x^2+y^2+z^2]^{1/2}}.$$

в движущейся системе координат мы не можем, преобразования Лоренца не верны, преобразования Галилея – наше всё.
Ну, итог вы знаете…